Les suites (TSTI2D)

(1) Limites

(a) Suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\in IN}$ une suite de nombre réels et $L \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ se dit « la limite de u_n vaut *L* lorsque *n* tend vers $+\infty$ » et signifie que :

Quelle que soit la précision 10^{-p} voulue (où *p* est un entier naturel), on peut trouver un rang *R* à partir duquel l'écart $|u_n - L|$ entre u_n et *L* sera toujours inférieur à 10^{-p}

Autrement dit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ si, et seulement si, pour tout entier naturel *p*, il existe un rang *R* tel que pour tout entier naturel *n* ,

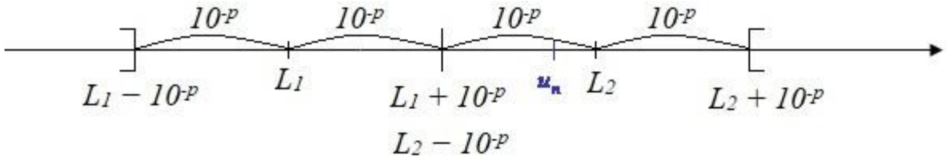
si $n \geq R$ alors $|u_n - L| \leq 10^{-p}$

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2 + \dfrac{1}{n} = 0{,}2$

Définition
On dit que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ **converge** vers le nombre réel *L* **(fini)** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.
On dit alors que $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite **convergente**.

Propriété
Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

Idée de démonstration
On raisonne par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L_2$ où L_1 et L_2 sont 2 nombres réels distincts.



Pour une précision 10^{-p} inférieure à la moitié de l'écart entre L_1 et L_2 il devrait exister un rang R à partir duquel u_n sera proche à la fois de L_1 et L_2. or c'est impossible.
L'hypothèse selon laquelle la suite $(u_n)_{n\in IN}$ peut converger vers 2 nombres réels distincts est donc absurde, par conséquent, si une suite converge, sa limite est unique.

(b) Suites divergentes

Définition
On dit qu'une suite est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.
Il existe 2 types de suites divergentes : celles qui n'ont pas de limite et celles dont la limite est infinie.

Exemple important :
La suite définie pour tout entier naturel *n*, par $w_n = (-1)^n$ vaut alternativement 1 (lorsque *n* est pair) ou -1 (lorsque *n* est impair). Cette suite n'a pas de limite.
On peut le justifier par un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre réel *L* tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$.
Ce nombre L devrait alors être à la fois proche de 1 et de -1(pour n'importe quelle précision), ce qui est absurde. Un tel nombre L n'existe donc pas, ce qui prouve bien que la suite $(w_n)_{n\in IN}$ n'a pas de limite.

Définition
Soit $(u_n)_{n\in IN}$ une suite de nombre réels.
p désigne un entier naturel
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie que quel que soit le seuil 10^p à partir duquel on considère les nombres comme grands,
il existe un rang *R* tel que pour tout entier naturel *n* , si $n \geq R$ alors $u_n \geq 10^p$

Exemple :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Exercice de compréhension :

Adapter la définition précédente pour écrire la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

(2) Calculs de limites

(a) Limites usuelles

k désigne un entier naturel fixé et *q* une constante réelle fixée

Formule de la suite	$u_n = n^k$	$u_n = \frac{1}{n}$	$u_n = \sqrt{n}$	$u_n = q$	$u_n = q^n$	
Limite	$+\infty$	0	$+\infty$	q	0	si $-1 < q < 1$
					$+\infty$	si $q > 1$
					pas de limite	si $q \leq -1$

(b) Opérations sur les limites

Les règles de calcul présentées dans les tableaux ci-dessous ne s'appliquent pas si au moins une des 2 suites n'admet pas de limite.

Un « ? » indique une **forme indéterminée**, c'est à dire une expression dont la limite peut être n'importe quoi (voire ne pas exister) ; pour lever cette indétermination il suffit souvent de transformer l'écriture de l'expression.

Lorsqu'on écrit $\pm\infty$, cela signifie que l'expression tend vers $+\infty$ si elle est positive, vers $-\infty$ si elle est négative mais l'expression ***n'a pas de limite*** si son signe ne devient pas constant à partir d'un certain rang ; il suffit donc d'étudier le signe de l'expression dans chaque cas pour déterminer la limite exacte éventuelle.

L et λ désignent deux nombres réels **non nuls**

limite de $u_n + v_n$		*limite de u_n*			
		0	λ	$+\infty$	$-\infty$
limite de v_n	*0*	*0*	λ	$+\infty$	$-\infty$
	L	*L*	$\lambda + L$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*?*
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*?*	$-\infty$

limite de $u_n - v_n$		*limite de u_n*			
		0	λ	$+\infty$	$-\infty$
limite de v_n	*0*	*0*	λ	$+\infty$	$-\infty$
	L	*- L*	$\lambda - L$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*?*	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*?*

limite de $u_n \times v_n$		*limite de u_n*			
		0	λ	$+\infty$	$-\infty$
limite de v_n	*0*	*0*	*0*	*?*	*?*
	L	*0*	$\lambda \times L$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$+\infty$	*?*	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	*?*	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

limite de $\frac{u_n}{v_n}$		*limite de u_n*			
		0	λ	$+\infty$	$-\infty$
limite de v_n	*0*	*?*	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	L	*0*	$\frac{\lambda}{L}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$+\infty$	*0*	*0*	*?*	*?*
	$-\infty$	*0*	*0*	*?*	*?*

Ces nombreuses règles, conformes à l'intuition, sont admises, mais elles pourraient être démontrées à partir de la définition des limites.

(c) Exemples de formes indéterminées

Les notations utilisées ici pour désigner les formes indéterminées ne correspondent pas à des opérations clairement définies (puisque le résultat peut être n'importe quoi ou ne pas exister), elles ne peuvent donc en aucun cas apparaître dans un calcul.

Forme indéterminée version « $\frac{\infty}{\infty}$ »	Forme indéterminée version « $\infty \times 0$ »	Forme indéterminée version « $\frac{0}{0}$ »	Forme simplifiée permettant de conclure	Limite en $+\infty$
$\frac{4n}{n^3}$	$4n \times \frac{1}{n^3}$	$\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{4n}}$	$\frac{4}{n^2}$	0
$\frac{4n^5}{n^3}$	$4n^5 \times \frac{1}{n^3}$	$\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{4n^5}}$	$4n^2$	$+\infty$
$\frac{4n^3}{n^3}$	$4n^3 \times \frac{1}{n^3}$	$\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{4n^3}}$	4	4
$\frac{(-1)^n \times n^3}{n^3}$	$n^3 \times \frac{(-1)^n}{n^3}$	$\frac{\frac{(-1)^n}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}$	$(-1)^n$	Pas de limite

(3) Suites géométriques

Théorème : somme des termes d'une suite géométrique

Pour tout nombre réel $q \neq 1$ et pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(u_0 \times q^k\right) = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + u_0 \times q^3 + ... + u_0 \times q^{(n-1)} + u_0 \times q^n = u_0 \times \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q} = u_0 \times \frac{q^{(n+1)}-1}{q-1}$$